TD1 - Les booléens et les conversions

Inès de Courchelle - Peio Loubiere

CY TECH

2024-2025

Objectifs :

- Comprendre la mécanique des booléens
- Représenter un problème en logique booléennes
- Convertir des entiers et des réels dans plusieurs bases
- Réaliser des opérations sur des entiers
- Encoder les entiers signés
- Prendre des notes

Consignes :
L'ensemble des exercices ci-dessous ne seront pas tous corrigés en cours !
Les éléments de correction seront donnés en TD, EN AUCUN CAS, des corrections toutes faites vous seront données ou distribuées. Vous devez prendre des notes !
Durant ce TD, l'utilisation d'un papier et d'un crayon sont fortement conseillés!
INTERDIT DE PRENDRE EN PHOTO LES CORRECTIONS AU TABLEAU
Durée 4h30
Format papier

Exo 1 : Les Booléens

1. Montrez que :
   a) $A + \overline{A}B = A + B$
   b) $ABC + AB\overline{C} = AB$
   c) $AB + A\overline{B}C = AB + AC$
   d) $AB + \overline{A}C + BC = AB + \overline{A}C$

Attention : N'oubliez pas de décrire chaque étape

2. « F(A,B,C) = 1 si et seulement si la majorité des trois variables A, B, C valent 1. »
   Représenter cette fonction sous forme de :
   a) Table de vérité
   b) Equation

1. a) $A + \overline{A}B = A + B$

Distributivité :

- $A(B + C) = AB + AC$
- $A + (BC) = (A + B)(A + C)$

1. b) $ABC + AB\overline{C} = AB$

Factorisation :
$AB + BC = B(A + C)$

1. c) $AB + A\overline{B}C = AB + AC$

Factorisation : $AB + BC = B(A + C)$
Distributivité :

- $A(B + C) = AB + AC$
- $A + (BC) = (A + B)(A + C)$

1. d) $AB + \overline{A}C + BC = AB + \overline{A}C$

Piège : on peut rajouter des expressions tant que ça ne modifie pas le résultat
Exemple
$A + B \Leftrightarrow A + B.1 \Leftrightarrow A + B.(A + \overline{A})$

- Formule du cours : $1 + A = 1$

2. a) « F(A,B,C) = 1 si et seulement si la majorité des trois variables A, B, C valent 1. » Représenter cette fonction sous forme de “Table de vérité”

(à remplir)

A	B	C	F

2. b)« F(A,B,C) = 1 si et seulement si la majorité des trois variables A, B, C valent 1. » Représenter cette fonction sous forme d’Équation

Exo 2 : Le bus

Les bus quittent le terminal toutes les heures à moins qu'il y ait moins de 10 passagers ou que le chauffeur soit en retard. S'il y a moins de 10 passagers, le bus attendra 10 min ou jusqu'à ce que le nombre de passagers atteigne 10. Si le bus part à l'heure, il peut rouler à 100 Km/h. S'il part en retard ou s'il pleut, il ne peut rouler qu'à 50 Km/h. Dans quelles conditions le bus roule à 100 Km/h ?

1. Identifier les variables
2. Écrire l'expression logique de chaque phrase
3. Travailler les différentes équations entre elles pour répondre à la question

1. Identifier les variables

Quelques conseils :

- Il faut que chaque variable soit un état.
- Il faut que l'on puisse exprimmer son inverse ($\overline{A}$)

Exemple : Le bus est un élément pas une variable, ce n'est pas un état. Par contre, «le bus roule à 100km/h» est un état. On peut exprimer son inverse
V => le bus roule à 100km/h
$\overline{V}$ => le bus ne roule pas à 100km/h

2. Écrire l'expression logique de chaque phrase

Phrase N°1 : Les bus quittent le terminal toutes les heures à moins qu'il y ait moins de 10 passagers ou que le chauffeur soit en retard.

Phrase N°2 :Si le bus part à l'heure, il peut rouler à 100 Km/h. S'il part en retard ou s'il pleut, il ne peut rouler qu'à 50 Km/h.

3. Travailler les différentes équations entre elles pour répondre à la question

Exo 3 : Bonnes pratiques

Alice réussira son examen d'informatique si elle a bien révisé ses cours et TDs et que Bob ne l'a pas invitée à prendre l'apéro. Bob invite Alice à prendre l'apéro s'il fait beau, et si Alice lui a adressé la parole en TD d'informatique, car elle n'a rien compris à ce qu'a expliqué le prof. Le prof expliquera d'une manière limpide s'il a bien mangé et passé une bonne nuit.

Quelles sont les conditions pour qu'Alice réussisse son examen ?

Exo 4 : Réflexion autour de la conversion

1. À quoi correspond un décalage à gauche de tous les chiffres en base binaire ?

Exemple :
$(1011)_2 -> (10110)_2$
À quoi correspond un tel décalage dans une base b ?

2. Même question pour un décalage à droite (on ne considère que des nombres entiers).

3. Combien de nombres entiers positifs différents peut-on exprimer avec 8 chiffres en base 2 ? Et plus généralement avec k chiffres en base b ?

1. À quoi correspond un décalage à gauche de tous les chiffres en base binaire ?

Exemple :

$(1011)_2 -> (10110)_2$

À quoi correspond un tel décalage dans une base b ?

Représentation d'une base 2	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
Équivalence en base 10	256	128	64	32	16	8	4	2	1

2. Même question pour un décalage à droite (on ne considère que des nombres entiers).

3. Combien de nombres entiers positifs différents peut-on exprimer avec 8 chiffres en base 2 ? Et plus généralement avec k chiffres en base b ?

Exo 5 : Les conversions de bases les entiers

1. Convertir en base 10 les nombres suivants : $(0)_2(10010)_2(100011)_2(111)_2$
2. Convertir en base 2 les nombres suivants : $(1)_{10}, (5)_{10}, (130)_{10}$
3. Convertir en base 8 les nombres suivants : $(54)_{10}, (12)_{10}, (22)_{10}, (130)_{10}$
4. Convertir en base 16 les nombres suivants : $(1)_{10}, (45)_{10}, (130)_{10}, (255)_{10}$
5. Convertir en base 2 les nombres suivants : $(642)_8, (BAC)_{16}$
6. Convertir les nombres suivants dans les bases correspondantes :$(AFF)_{16} = (??)_8$,$(100101)_2 = (??)_{10}$,$(225)_8 = (??)_2$

1. Convertir en base 10 les nombres suivants : $(0)_2(10010)_2(100011)_2(111)_2$

On considère le tableau suivant :

Représentation d'une base 2	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
Équivalence en base 10	256	128	64	32	16	8	4	2	1

En base 2, nous ne sommes autorisés à utiliser seulement les chiffres 0 et 1. Donc pour représenter un nombre donné nous devons le retrouver en faisant la somme des exposants.

Exemple Comment écrire 12 en binaire ? $(12)_10 = (1100)_2$

Représentation d'une base 2	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
Équivalence en base 10	256	128	64	32	16	8	4	2	1
						1	1	0	0

$2^3 \times 1 + 2^2 \times 1 + 2^1 \times 0 + 2^0 \times 0 = 12$

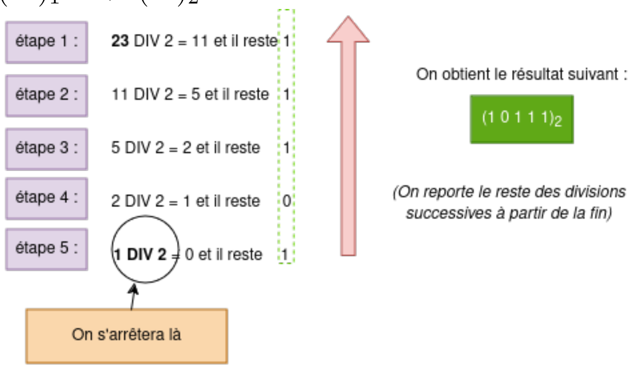
$(0)_2 => (??)_{10}$

$(10010)_2 => (??)_{10}$

$(111)_2 => (??)_{10}$

2. Convertir en base 2 les nombres suivants : $(1)_{10}$, $(5)_{10}$, $(130)_{10}$

La méthode des divisions successives Le principe consiste à diviser successivement par 2, le nombre à convertir jusqu'à ce que le résultat de la division soit égal à zéro.
Exemple On souhaite convertir $(23)_10 => (??)_2$



Vérification

Représentation d'une base 2	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
Équivalence en base 10	256	128	64	32	16	8	4	2	1
					1	0	1	1	1

$(1)_{10} => (??)_2$

$(5)_{10} => (??)_2$

$(130)_{10} => (??)_2$

3. Convertir en base 8 les nombres suivants : $(54)_{10}, (12)_{10}, (22)_{10}, (130)_{10}$

On considère le tableau suivant :

Représentation d'une base 8	8^5	8^4	8^3	8^2	8^1	8^0
Équivalence en base 10	32768	4096	512	64	8	1

En base 8, nous ne sommes autorisés à utiliser seulement les chiffres de 0 et 7. Donc pour représenter un nombre donné nous devons le retrouver en faisant la somme des exposants.

Exemple On souhaite convertir $(11)_10 => (??)_8$

Représentation d'une base 8	8^5	8^4	8^3	8^2	8^1	8^0
Équivalence en base 10	32768	4096	512	64	8	1
					1	3

$8^1 \times 1 + 8^0 \times 3 = 11$

$(54)_{10} => (??)_8$

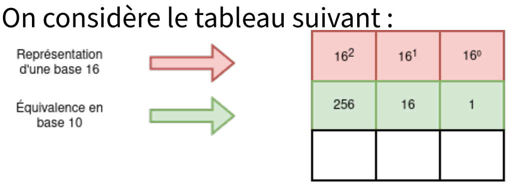
$(12)_{10} => (??)_8$

$(22)_{10} => (??)_8$

$(130)_{10} => (??)_8$

4. Convertir en base 16 les nombres suivants : $(1)_{10}, (45)_{10}, (130)_{10}, (255)_{10}$

On considère le tableau suivant :



En base 16, nous ne sommes autorisés à utiliser seulement les chiffres de 0 et 9 et les lettres de A à F. Donc pour représenter un nombre donné nous devons le retrouver en faisant la somme des exposants.

Attention

En base 16, on écrit pas 10 mais A

F	**E**	**D**	**C**	**B**	**A**	**9**	**8**	**7**	**6**	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**	**0**
15	*14*	*13*	*12*	*11*	*10*										

Exemple

On souhaite convertir $(25)_{10} => (??)_{16}$

$25/16 = 1$ et il reste 9

Donc $(25)_{10} => (19)_{16}$

$(1)_{10} => (??)_{16}$

$(45)_{10} => (??)_{16}$

$(130)_{10} => (??)_{16}$

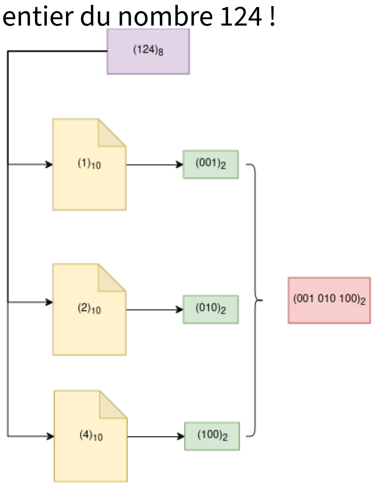
$(255)_{10} => (??)_{16}$

5. Convertir en base 2 les nombres suivants : $(642)_8$, $(BAC)_{16}$

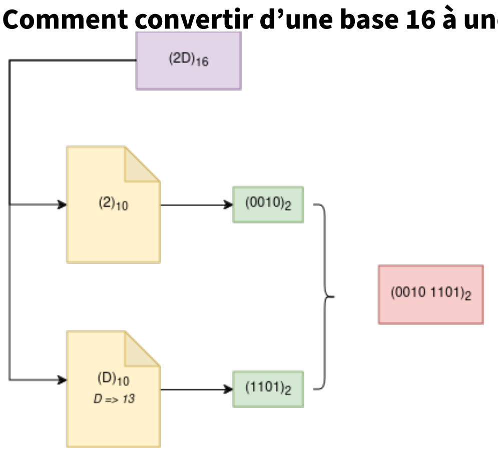
Comment convertir d'une base 8 à une base 2 ?

Exemple Nous voulons convertir $(124)_8$ en base 2 ? Le chiffre 8 est trouvé est trouvé comme suit : $8 = 2^3$

On va donc générer un nombre à générer un nombre binaire à 3 chiffres pour chaque entier du nombre 124 !



Comment convertir d'une base 16 à une base 2 ?



Exemple Nous voulons convertir $(2D)_{16}$ en base 2 ? Le chiffre 16 est trouvé est trouvé comme suit : $16 = 2^4$

On va donc générer un nombre à générer un nombre binaire à 4 chiffres pour chaque entier du nombre 2D !

$(642)_8 => (??)_2$

$(BAC)_{16} => (??)_2$

6. Convertir les nombres suivants dans les bases correspondantes :$(AFF)_{16} = (??)_8$,$(100101)_2 = (??)_{10}$,$(225)_8 = (??)_2$

$(AFF)_{16} = (??)_8$

$(100101)_2 = (??)_{10}$

$(225)_8 = (??)_2$

Exo 6 : Les opérations

Effectuer les opérations suivantes :

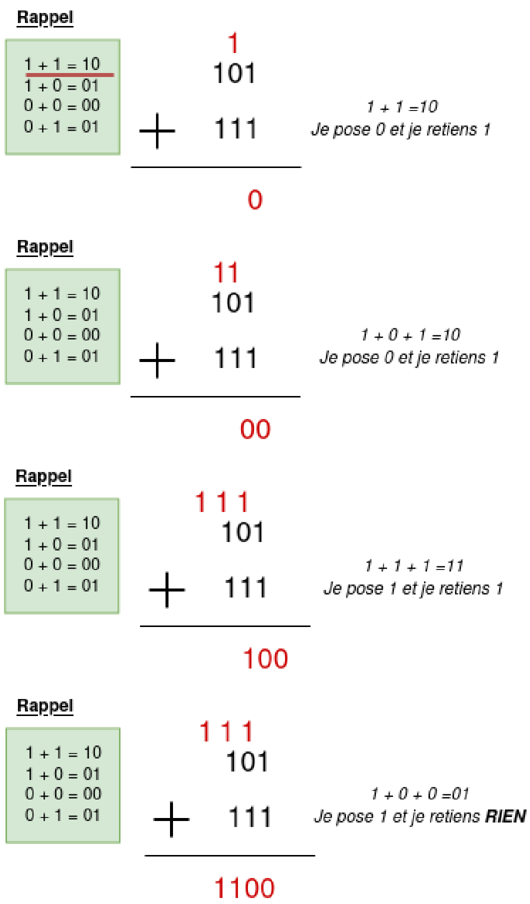
1. $(1101)_2 + (0101)_2$
2. $(10010)_2 - (0100)_2$
3. $(111)_2 \times (101)_2$
4. $(1872)_{16} + (AA95)_{16}$
5. $(2A)_{16} \times (3)_{16}$

Addition

Rappel

1 + 1 = 10
1 + 0 = 01
0 + 0 = 00
0 + 1 = 01

$$\begin{array}{r} 101 \\ +\quad 111 \\ \hline ???? \end{array}$$



1. $(1101)_2 + (0101)_2$

Soustraction

Rappel

1 - 1 = 0
1 - 0 = 01
0 - 0 = 00
10 - 1 = 01

```
   1011
—   111
-------
   ????
```

Rappel

1 - 1 = 0
1 - 0 = 01
0 - 0 = 00
10 - 1 = 01

```
   1011
—   111
-------
      0
```

1- 1 =0
*Je pose 0 et je retiens **RIEN***

Rappel

1 - 1 = 0
1 - 0 = 01
0 - 0 = 00
10 - 1 = 01

```
   1011
—   111
-------
     00
```

1- 1 =0
*Je pose 0 et je retiens **RIEN***

00

Rappel

1 - 1 = 0
1 - 0 = 01
0 - 0 = 00
10 - 1 = 01

```
   1011
—   111
-------
     00
```

0 - 1 = ?
On n'a pas le droit

Rappel

1 - 1 = 0
1 - 0 = 01
0 - 0 = 00
10 - 1 = 01

```
    1
   1011
—   111
-------
    100
```

On pose 1 et on fait
10 - 1 = 01

Rappel

1 - 1 = 0
1 - 0 = 01
0 - 0 = 00
10 - 1 = 01

```
    1
   1011
— +1111
-------
    100
```

on rajoute un au nombre suivant

Rappel

1 - 1 = 0
1 - 0 = 01
0 - 0 = 00
10 - 1 = 01

```
    1
   1011
—  1111
-------
   0100
```

1 - 1 = 0

2. $(10010)_2 - (0100)_2$

3. $(111)_2 \times (101)_2$

4. $(1872)_{16} + (AA95)_{16}$

5. $(2A)_{16} \times (3)_{16}$

Exo 7 : Les entiers signés

1. Coder sur 4 bits les entiers 7, 2, 0, -2, -7 et -8 avec les trois représentations: signe et valeur absolue, complément à 1, complément à 2.
2. Coder les entiers 61 et -61 sur un octet en utilisant la représentation par le signe et la valeur absolue. Montrer que l'addition binaire de ces entiers ainsi codés produit un résultat incorrect. Montrer qu'en revanche le résultat est correct si ces entiers sont codés en utilisant la représentation par le complément à 2.
3. Coder sur 16 bits en complément à 2 le nombre $(-184)_{10}$
4. Donner les valeurs en base de 10 du nombre binaire 10010010 en considérant dans un premier temps un codage non signé, puis un codage signé en complément à 2.

1. Coder sur 4 bits les entiers 7, 2, 0, -2, -7 et -8 avec les trois représentations: signe et valeur absolue, complément à 1, complément à 2.

2. Coder les entiers 61 et -61 sur un octet en utilisant la représentation par le signe et la valeur absolue. Montrer que l'addition binaire de ces entiers ainsi codés produit un résultat incorrect. Montrer qu'en revanche le résultat est correct si ces entiers sont codés en utilisant la représentation par le complément à 2.

3. Coder sur 16 bits en complément à 2 le nombre $(-184)_{10}$

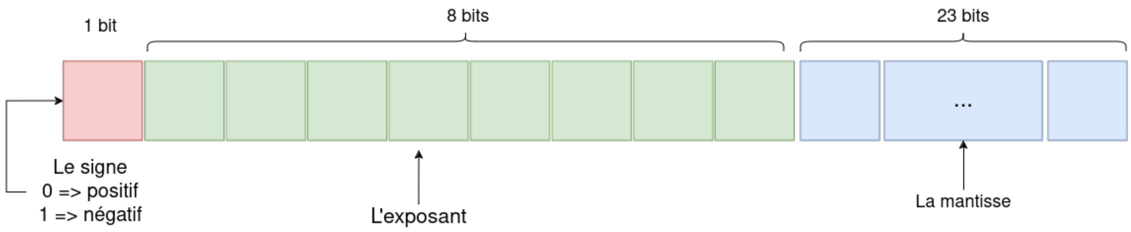
4. Donner les valeurs en base de 10 du nombre binaire 10010010 en considérant dans un premier temps un codage non signé, puis un codage signé en complément à 2.

Exo 8 : Les réels

1. En virgule fixe, décoder les nombres binaires 11,011 et 11101,111 puis coder en binaire le réel 11,625.
2. En virgule flottante IEEE, coder en binaire au format simple précision le réel 12,575. Vérifier le résultat en réalisant la conversion inverse.
3. Que vaut le nombre réel suivant en base 10 : $11000011100101101000000000000000$
4. Coder le réel -14,15 (aussi précisément que possible)
5. Soit $a = (1,1001 \times 10101)_2$ et $b = (1,1101 \times 101)_2$. Calculer a+b et a*b.
6. Donner en IEEE le plus grand et le plus petit nombre normalisés positifs.

1. En virgule fixe, décoder les nombres binaires 11,011 et 11101,111 puis coder en binaire le réel 11,625.

2. En virgule flottante IEEE, coder en binaire au format simple précision le réel 12,575. Vérifier le résultat en réalisant la conversion inverse.



Pour transformer un réel en format IEEE, il y a 8 étapes à réaliser :

- étape 1 : convertir la partie entière en binaire
- étape 2 : convertir la partie décimale en binaire
- étape 3 : combiner la partie entière et décimale
- étape 4 : utiliser la notation scientifique
- étape 5 : identifier le bit de signe
- étape 6 : transformer l'exposant de la notation scientifique
- étape 7 : convertir l'exposant en binaire
- étape 8 : assembler le signe, l'exposant et la mantisse

3. Que vaut le nombre réel suivant en base 10 : $11000011100101101000000000000000$

4. Coder le réel -14,15 en simple précision (aussi précisément que possible)

5. Soit $a = (1,1001 \times 10101)_2$ et $b = (1,1101 \times 101)_2$. Calculer a+b et a*b.

6. Donner en IEEE le plus grand et le plus petit nombre normalisés positifs.